

Modelación y Simulación en Lazo Cerrado de una Mesa XY

Juan A. Ramírez, Julio C. Correa y Luis B. Gutiérrez

Abstract—This article shows the modeling and closed loop simulation of an automated XY table. The modeling process is made considering all kinematic constraints and the dynamics of the electromechanical system. The obtained model is used to design a control system which enables the machine to follow the basic trajectories of a numerical control system. The control strategy is proved through simulation.

Resumen—En este artículo se muestra la modelación y simulación en lazo cerrado de una mesa XY. El proceso de modelación se hace considerando todas las restricciones cinemáticas y la dinámica del sistema electromecánico. El modelo obtenido es usado para el diseño del sistema de control, el cual permite que la máquina siga las trayectorias básicas de un sistema de control numérico. La estrategia de control se prueba en ambiente de simulación.

Index Terms—Computer Numerical Control, Feedback Control, Modeling, Closed Loop Simulation.

I. INTRODUCCIÓN

La modernización de los laboratorios que prestan su servicio a la Escuela de Ingenierías de la Universidad Pontificia Bolivariana es una tarea que ha sido considerada estratégica por las implicaciones que tiene en la vida académica de la Universidad y de la Escuela. Una de las formas como los Laboratorios de Mecánica aportan a este proceso es mediante la modernización de sus equipos.

Actualmente el Laboratorio cuenta con una máquina para corte de metales por plasma cuyo funcionamiento es manual, lo cual limita la calidad y la complejidad de los cortes obtenidos. Las prestaciones de la máquina pueden incrementarse significativamente si el dispositivo de corte se monta en una plataforma móvil con control automático. De esta forma es posible hacer cortes con geometrías muy irregulares y controlar la velocidad de corte, lo que mejora la calidad del producto final.

Los beneficios de implementar tal sistema son tanto académicos como técnicos. Ya que a pesar de que comercialmente se encuentran soluciones similares, se encuentra que es clave desagregar las tecnologías que ofrecen compañías especializadas. Asimismo, es también clave contar con una plataforma de laboratorio suficientemente abierta que permita implementar diferentes estrategias de control de movimiento. Con base en lo anterior, se inicia la ejecución de un proyecto en el cual se desarrolla el diseño y control de un sistema electromecánico que permita que una antorcha de corte por plasma esté en la capacidad de efectuar cortes controlados

numéricamente por computador. Este tipo de desarrollos requiere del trabajo conjunto en el área de diseño mecánico y en el área de control automático. El trabajo conjunto entre las áreas de diseño y control permite que las soluciones planteadas no estén desligadas y que el desempeño final del sistema sea más adecuado. Algunas de las experiencias que verifican lo anterior son mostradas por Dequidt [1] y Kuzuya [2].

El diseño mecánico se encarga de dimensionar y definir la forma de las piezas de la mesa, seleccionar los materiales y los procesos de manufactura. Por otra parte, el control se encarga de diseñar los algoritmos que permiten que el sistema integrado esté en la capacidad de desempeñar adecuadamente las tareas que se le asignen. Las labores de diseño y control deben estar articuladas debido a que el sistema de control se diseña con base en la planta a controlar y, por otra parte, el diseño mecánico se puede realimentar de los resultados que se encuentren en las simulaciones del sistema en lazo cerrado. En este artículo se presenta el proceso de modelación del sistema electromecánico, incluyendo la deducción de las relaciones cinemáticas y la obtención de las ecuaciones diferenciales que explican el comportamiento dinámico. Luego, a partir del modelo, se plantea una primera aproximación a una estrategia de control que permite que la máquina siga un conjunto predeterminado de trayectorias, propias de un sistema CNC (Computer Numerical Control) convencional. Finalmente, los resultados de la implementación del sistema de control se muestran en ambiente de simulación.

II. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO

El equipo diseñado consiste en una mesa rectangular de dos ejes (mesa XY), para corte usando plasma. El hecho de que sea una mesa XY quiere decir que ésta tiene la posibilidad de moverse de manera desacoplada en dos direcciones perpendiculares sobre un plano horizontal. Cada eje cuenta con un motor-reductor de corriente directa y de imán permanente. También cuenta con una transmisión piñón - cremallera para la conversión de movimiento traslacional en rotacional. Una vista general de la máquina se puede ver en la Fig. 1.

III. MODELACIÓN

En la modelación de la mesa se deben encontrar las relaciones cinemáticas y la definición de las ecuaciones diferenciales que explican el comportamiento dinámico. Luego, como los elementos usados en cada eje son similares, el proceso de modelación es el mismo en ambos casos. Por esta razón se puede definir un modelo general útil para cada eje, donde la única diferencia entre cada uno serían los parámetros físicos, tales como: masas, inercias, fuerzas de fricción, etc.

Juan A. Ramírez, Julio C. Correa y Luis B. Gutiérrez son integrantes del Grupo de Automática y Diseño A+D, Escuela de Ingenierías, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia. Correspondencia: juan.ramirez@upb.edu.co

Luis B. Gutiérrez es miembro IEEE. lbgutie@ieee.org

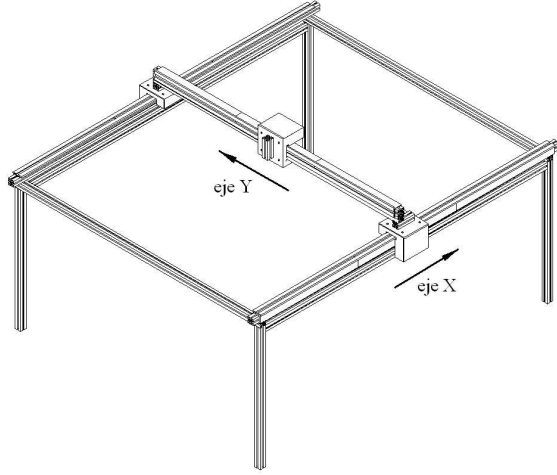


Fig. 1. Vista general de la mesa

A. Modelo cinemático

En el modelo cinemático se busca relacionar el movimiento de cada motor con el desplazamiento del elemento de corte. Para eso se deben considerar los diferentes mecanismos usados para la transmisión de potencia *i.e.* reductor de velocidad y mecanismo de piñón - cremallera.

El movimiento de desplazamiento de cada eje se puede relacionar con la rotación del eje de salida del reductor a través del radio de paso del piñón r_p . Dicha relación es

$$\dot{x} = r_p \omega_p, \quad (1)$$

donde \dot{x} es la velocidad de desplazamiento y ω_p es la velocidad angular del eje de salida del reductor.

El movimiento del eje del reductor se puede relacionar con el movimiento del eje del motor, si se conoce la relación de transmisión del tren de engranajes r_g . La expresión que relaciona estas variables es

$$\omega = r_g \omega_p, \quad (2)$$

donde ω es la velocidad angular del motor.

B. Modelo dinámico

En el modelo dinámico se consideran todos los elementos móviles dentro del sistema mecánico de cada eje y se considera la dinámica del sistema eléctrico. Dentro de los elementos mecánicos se considera el movimiento del carro, del piñón y del motor-reductor. En todos los casos se usan los principios de la mecánica clásica Newtoniana [3].

1) *Modelo del sistema mecánico:* En la Fig. 2 se muestra un diagrama de fuerzas para el carro, en el cual se considera la fuerza ejercida por el piñón F y la fuerza de fricción con los rieles F_R .

Si se asume que la fuerza de fricción tiene una componente de Coulomb y una componente viscosa, la ecuación de movimiento sería

$$F - F_f \text{sign}(\dot{x}) - \beta \dot{x} = m \ddot{x}. \quad (3)$$

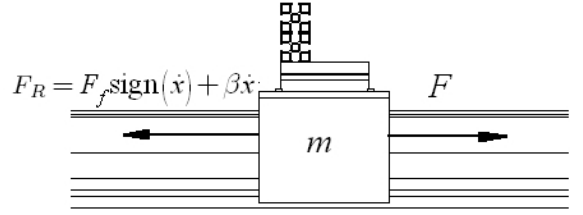


Fig. 2. Diagrama de fuerzas para el carro

donde \dot{x} y \ddot{x} son la velocidad y aceleración del carro respectivamente, β es el coeficiente de fricción viscosa y F_f es la componente de fricción de Coulomb. Con (3) se tiene una expresión para el movimiento de desplazamiento de cada eje. Si se analiza el piñón, se puede obtener el diagrama de cargas de la Fig. 3 y con base en éste, obtener que

$$-F r_p + \tau_p = I_p \dot{\omega}_p. \quad (4)$$

Donde τ_p es el torque aplicado sobre el piñón, I_p es el momento de inercia y $\dot{\omega}_p$ es la aceleración angular. De este modo, en (4) se tiene una expresión para el movimiento rotacional del piñón.

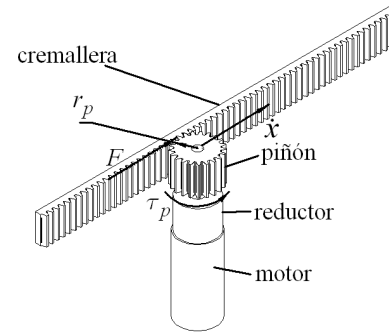


Fig. 3. Diagrama de cargas en el piñón

Si se usan los resultados de (1), (3) y (4), se puede obtener que

$$\tau_p - F_f \text{sign}(\omega_p) - \beta r_p^2 \omega_p = (I_p + m r_p^2) \dot{\omega}_p, \quad (5)$$

la cual es una única ecuación de movimiento para el conjunto carro - piñón. Ahora, para incluir el efecto del motor - reductor, se considera la relación de transmisión del reductor

$$\tau_p = \eta r_g \tau_m, \quad (6)$$

donde η es la eficiencia de la reducción y τ_m es el torque generado por el motor. Adicionalmente, se puede considerar el análisis de la parte mecánica del motor, si se escribe que

$$\tau_I - \tau_m - \beta_m \omega = I_m \dot{\omega}, \quad (7)$$

donde τ_I es el torque inducido al motor, β_m es la fricción viscosa en los cojinetes e I_m es la inercia generalizada del

conjunto motor - reductor.

Si se usan los resultados de (2), (5), (6) y (7), se puede llegar a una única ecuación para la dinámica de todo el sistema mecánico:

$$J\dot{\omega} + B\omega + T_f \text{sign}(\omega) = \tau_I, \quad (8)$$

donde:

$$J = I_m + \frac{I_p + mr_p^2}{\eta r_g^2},$$

$$B = \beta_m + \frac{\beta r_p^2}{\eta r_g^2}$$

y

$$T_f = \frac{F_f r_p}{\eta r_g}.$$

2) *Modelo del sistema eléctrico:* En el caso del modelo de sistema eléctrico se considera que el sistema es movido por un motor de CD de imán permanente controlado por armadura. De este modo, se puede decir que [4], [5]:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + K_b \omega = v(t) \quad (9)$$

donde L y R son la inductancia y la resistencia de la armadura respectivamente, i y $v(t)$ son la corriente y el voltaje de la armadura y K_b es la constante de velocidad del motor. Adicionalmente, se debe considerar que

$$\tau_I = K_m i. \quad (10)$$

donde K_m es la constante de torque del motor.

C. Modelo del sistema completo

En la Fig. 4 se muestra un diagrama de bloques en el que se expresa la dinámica de cada eje de la máquina, incluyendo el sistema eléctrico y mecánico. Como puede verse, el sistema sólo contiene una no linealidad debida a la fricción de Coulomb. Esta se debe a la discontinuidad generada por la función signo con la que se modela este tipo de fricción.

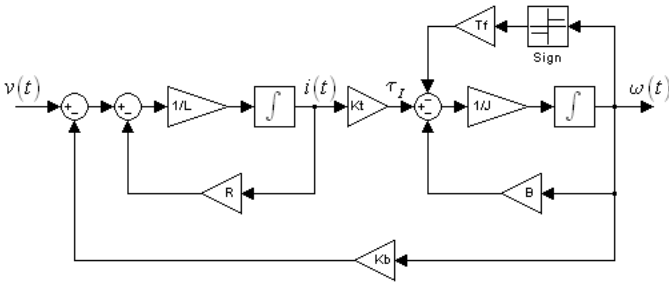


Fig. 4. Diagrama de bloques de cada eje

Si se usan (8), (9) y (10), y se normaliza el voltaje de entrada *i.e.* $v(t) = v_{\max} u(t)$; se puede obtener el siguiente modelo en espacio de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} (K_m x_2 - B x_1 - T_f \text{sign}(x_1)) \\ \frac{1}{L} (v_{\max} u(t) - R x_2 - K_b x_1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

y

$$y(t) = \frac{r_p}{r_g} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde el estado está dado por

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ i \\ \theta \end{bmatrix}$$

y la salida está dada por

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones dado en (11) y (12) representa el modelo dinámico de cada eje, donde x y \dot{x} son la posición y velocidad de desplazamiento, respectivamente. Un modelo del sistema completo está compuesto por un conjunto de ecuaciones de este tipo para el eje X y para el eje Y.

IV. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

Para el sistema de control se propone una arquitectura con dos niveles jerárquicos, compuesta por un sistema de guía y un control de bajo nivel. El sistema de guía se encarga de interpretar el código ISO con las trayectorias requeridas para cada tarea y convertirlas en los valores de referencia requeridos para el control de bajo nivel. Asimismo, el control de bajo nivel se encarga del control de cada uno de los ejes *i.e.* se usa un lazo de control para cada eje por separado. Un esquema del sistema de control en general se muestra en la Fig. 5.

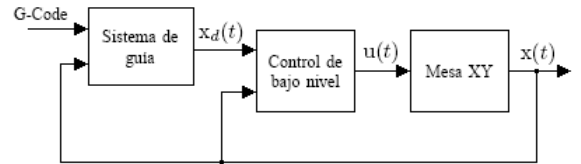


Fig. 5. Sistema de control

A. Sistema de guía

En el caso del sistema de guía, se propone un algoritmo diferente a los sistemas convencionales referenciados en textos especializados como el de Altintas [4], Lewis [6] ó Tsai [7]. El sistema de guía está compuesto por una componente lógica que calcula los valores deseados de posición y velocidad para cada instante y para cada eje, basado en la información contenida en un código ISO básico. Luego de calculados, los envía a los controladores de bajo nivel.

La información básica que contiene un código ISO es: el tipo de trayectoria, las coordenadas del punto objetivo, la rapidez de avance y, en el caso de trayectorias circulares, las coordenadas del centro del arco.

En cuanto al tipo de trayectorias, se consideran: movimiento para posicionamiento en línea recta (G0 en código ISO), movimiento de corte en línea recta (G1 en código ISO), trayectoria circular en sentido horario (G2 en código ISO) y trayectoria circular en sentido antihorario (G3 en código ISO)

[4], [8].

En el caso de trayectorias rectas (G0 y G1), se usa el mismo algoritmo, la única diferencia en ambos casos es la velocidad de avance. Inicialmente, el algoritmo calcula la dirección deseada de movimiento (Fig. 6), la cual está dada por

$$\psi_d = \text{atan2}(y_f - y, x_f - x), \quad (13)$$

donde ψ_d es la dirección deseada, (x_f, y_f) son las coordenadas

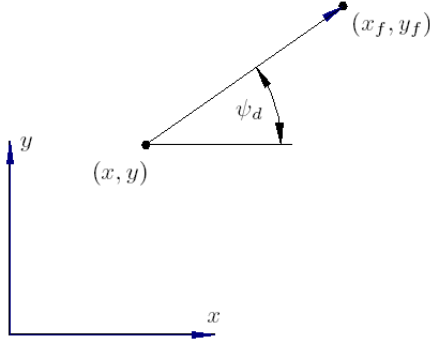


Fig. 6. Dirección deseada para movimientos G0 y G1

del punto objetivo y (x, y) es la posición actual. Luego, el algoritmo calcula la velocidad de avance deseada con base en un perfil de velocidad trapezoidal, en el cual se tiene un primer tramo con aceleración constante, un tramo intermedio a velocidad constante y un tramo final con aceleración constante negativa.

En el caso de trayectorias circulares (G2 y G3), se usa el mismo algoritmo para el cálculo de la velocidad deseada. Sin embargo, en este caso, la dirección deseada se calcula de forma diferente a la mostrada en (13). La dirección deseada sería

$$\psi_d = \text{atan2}(y_c - y, x_c - x) \pm \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

donde (x_c, y_c) son las coordenadas del centro del arco y donde el signo depende de si la trayectoria es horaria (G2) o antihoraria (G3) *i.e.* el signo es positivo para una trayectoria horaria y negativo para una trayectoria antihoraria. Finalmente, se calcula la velocidad deseada para cada uno de los ejes

$$\dot{x}_d = V_d \cos \psi_d \quad (15)$$

y

$$\dot{y}_d = V_d \sin \psi_d, \quad (16)$$

donde V_d es la rapidez deseada y \dot{x}_d y \dot{y}_d son la velocidad deseada de los ejes X y Y respectivamente. Adicionalmente, el valor deseado de posición en cada uno de los ejes se calcula teniendo en cuenta que

$$x_d(t) = \int_0^t \dot{x}_d(\tau) d\tau \quad (17)$$

y

$$y_d(t) = \int_0^t \dot{y}_d(\tau) d\tau. \quad (18)$$

B. Control de bajo nivel

En el control de bajo nivel se usa un lazo de control para cada uno de los ejes por separado. En la Fig. 7 se muestra la estrategia de control usada para cada lazo. Como puede

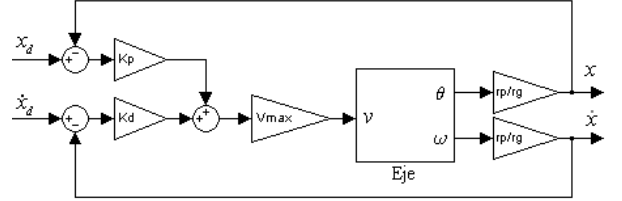


Fig. 7. Control de bajo nivel

verse, este controlador tiene una acción que depende del error en posición y una acción que depende del error en velocidad. Como se sabe que

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (19)$$

donde θ es la posición angular del eje del motor, el sistema tiene un integrador puro. Esto implica que se puede implementar el sistema de control de la Fig. 7 sin tener que usar explícitamente una acción integral.

V. RESULTADOS

Para probar la efectividad del sistema de control planteado en la sección anterior, se plantea la trayectoria de prueba de la Fig. 8. Como puede verse, la trayectoria contiene líneas

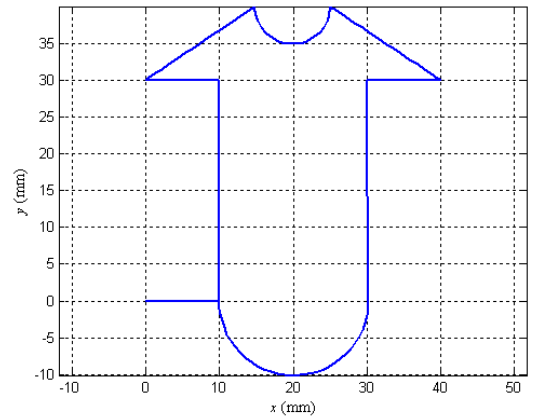


Fig. 8. Trayectoria deseada

rectas (verticales, horizontales y diagonales) y líneas circulares hechas en sentidos horario y antihorario.

Al implementar la estrategia de control sobre la trayectoria deseada, se encuentra que el sistema mantiene el error dentro de los límites admisibles para máquinas de corte por plasma, donde la naturaleza del proceso no ofrece precisiones superiores a 0.5 mm. La posición de cada eje en el tiempo y los errores de seguimiento en cada coordenada se muestran en la

Fig. 9 y en la Fig. 10 respectivamente.

Por otro lado, el comportamiento de la velocidad se muestra

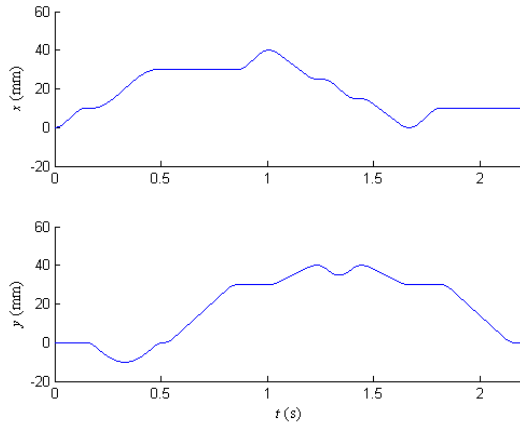


Fig. 9. Posición de cada eje en el tiempo

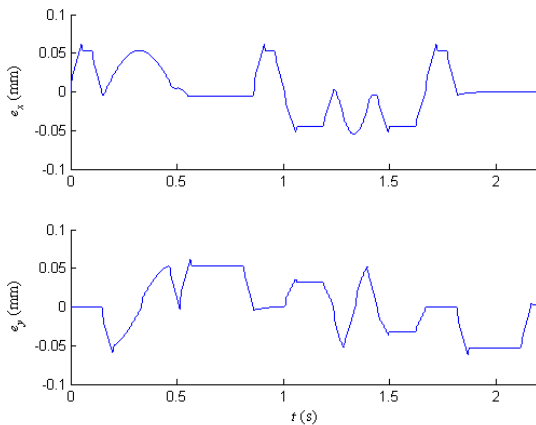


Fig. 10. Error de seguimiento de posición en cada eje

en la Fig. 11 y el error de seguimiento de velocidad se muestra en la Fig. 12.

Los resultados obtenidos muestran que la estrategia planteada es capaz de hacer que el control de la mesa esté en la capacidad de seguir las instrucciones de un código ISO, manteniendo los errores de seguimiento acotados dentro de los límites admisibles para el corte usando plasma. Asimismo, si bien los resultados prueban que la estrategia propuesta es válida cuando se implementa en tiempo continuo, es necesario probar su desempeño cuando el controlador se implementa en tiempo discreto.

VI. CONCLUSIONES

Se obtuvo un modelo matemático para la dinámica y la cinemática de una mesa cartesiana de dos ejes. El modelo obtenido se obtiene a partir de las ecuaciones de movimiento de los subsistemas de la mesa y de las restricciones de movimiento inherentes a la configuración del sistema

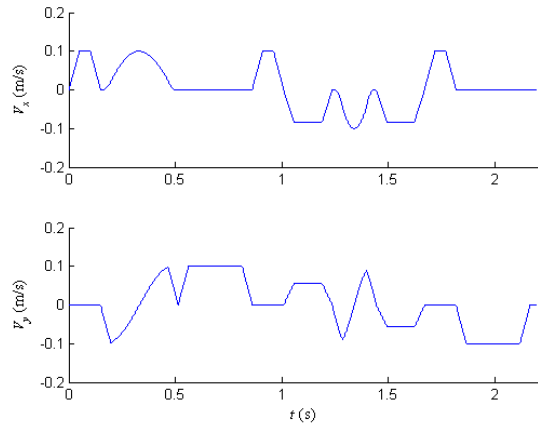


Fig. 11. Velocidad de cada eje

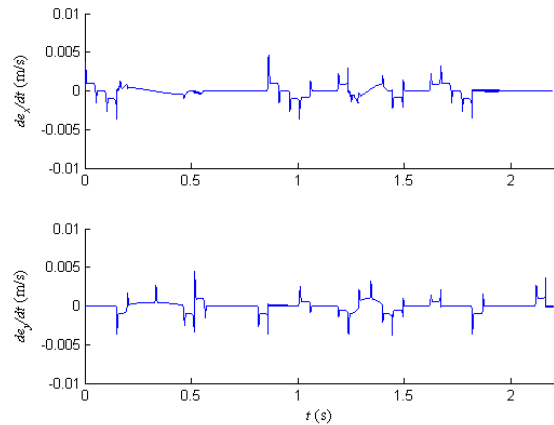


Fig. 12. Error de seguimiento de velocidad en cada eje

mecánico.

Para el control de movimiento se planteó el uso de una arquitectura de control con dos niveles jerárquicos: un sistema de guía y un controlador de bajo nivel. El uso de este sistema de control permitió que la mesa de corte siguiera una trayectoria predeterminada que contiene los tipos de movimiento básicos de cualquier sistema CNC.

Se diseñó un sistema de guía para la mesa, cuyo objetivo fue definir los valores de referencia requeridos por el control de bajo nivel, basándose en la información de un código ISO estándar. Este sistema de guía fue diseñado para que se puedan dar movimientos rectos y circulares (horarios y antihorarios) y para que los patrones de velocidad de avance fueran trapezoidales.

Se diseñó un sistema de control de bajo nivel que permite que se controle la velocidad y posición de cada uno de los ejes de la máquina. En este caso se usaron dos lazos de control independientes, uno para cada eje. En ambos casos se usó un controlador proporcional, tanto para el control de la velocidad, como para el control de la posición. Adicionalmente, aunque el sistema de control de bajo nivel controla cada eje de forma

desacoplada, el sistema de guía acopla los movimientos para garantizar un real seguimiento de las trayectorias.

El sistema de control planteado se prueba en ambiente de simulación y en tiempo continuo. Una fase posterior a este trabajo debe comprender el análisis de desempeño del controlador cuando éste es implementado en tiempo discreto. Posteriormente, esta estrategia debe ser probada mediante experimentación en el sistema real.

AGRADECIMIENTO

Este proyecto se desarrolla gracias a la financiación y al apoyo de la Facultad de Ingeniería Mecánica, a la dirección de los Laboratorios de Mecánica y a la Dirección de Docencia de la Universidad Pontificia Bolivariana.

REFERENCIAS

- [1] A. Dequidt, "Mechanical pre-design of high performance motion servo-mechanisms," *Mechanism and machine theory*, vol. 35, pp. 1047 – 1063, 2000.
- [2] H. Kuzuya, "Development of robust motor servo control for rear steering actuator based on two-degree-of-freedom control system," *Mechatronics*, vol. 10, pp. 53 – 66, 2000.
- [3] J. Meriam, *Engineering Mechanics: Dynamics*. New York, NY: John Wiley, 1997.
- [4] Y. Altintas, *Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations and CNC design*. New York (NY): Cambridge University Press, 2000.
- [5] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, 4th ed., México, Ed. Prentice Hall, 2003.
- [6] F. Lewis *et al.*, *Control of Robot Manipulators*. New York (NY): Macmillan, 2004.
- [7] L. Tsai, *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel robot manipulators*. New York (NY): John Wiley, 1999.
- [8] W. Seames, *Computer Numerical Control: Concepts and Programming*, 4th ed. CENGAGE Delmar Learning, 2001.