

automatización y diseño (A+D) la UPB, a saber, “Desarrollo de un vehículo volador no tripulado de ala fija para inspección y vigilancia (AURA)”, “Desarrollo de un vehículo sumergible operado remotamente ROV para inspección subacuática” y “Aplicación de un método de diseño de observadores no lineales”. Se busca además, la mayor claridad en la descripción del desarrollo, de manera que pueda ser utilizado fácilmente por otros diseñadores como base para sus trabajos.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: En la sección 2 se explica la estructura del observador que se desea implementar, en la sección 3 se desarrolla el modelo cinemático para un vehículo, en la sección 4 se especifica el modelo de ruido que se empleó para la simulación de los sensores, en la sección 5 se presentan las ecuaciones del filtro de Kalman, y se aplica este observador al sistema de navegación del vehículo. También se muestran los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 6 se dan las conclusiones del trabajo.

2. ESTRUCTURA DEL OBSERVADOR, CASO DE UNA AERONAVE

En la Fig. 1 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado, aplicado sobre un UAV, el cual incluye un observador. Se puede considerar que un observador es una estructura matemática que combina las entradas y salidas del sistema a observar; en este caso, las salidas de los sensores y las señales de excitación, con un modelo del sistema para proporcionar una estimación de los estados y las salidas de ese sistema. La robustez de la estimación depende de la estructura y adecuado diseño del observador.

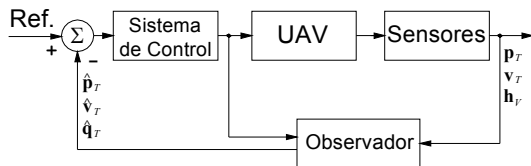


Fig. 1. Diagrama de funcionamiento del sistema de control y el observador en un UAV.

En este caso, se usará un modelo cinemático para el diseño e implementación del observador. Se ha preferido el modelo cinemático sobre el modelo dinámico porque si bien este último relaciona directamente las entradas (fuerzas aplicadas sobre el vehículo) con las salidas (aceleración, velocidad y posición), las ecuaciones que lo componen son complejas y fuertemente no lineales, además de incluir parámetros aleatorios y difíciles o imposibles de medir tales como la velocidad y dirección del viento, la turbulencia, los cambios de temperatura y otros factores climáticos. M. Grewal y S. Weill (Grewal et al, 2001) compararon los resultados obtenidos al diseñar dos sistemas de navegación utilizando un modelo dinámico y un modelo cinemático, y llegaron a la conclusión de que usar este último disminuye la complejidad del problema y arroja resultados

satisfactorios. Casi la totalidad de los autores han optado por esta alternativa (Farell et al, 1999).

La estructura del sistema controlado, usando un observador basado en un modelo cinemático sería como se muestra en la Fig. 2.

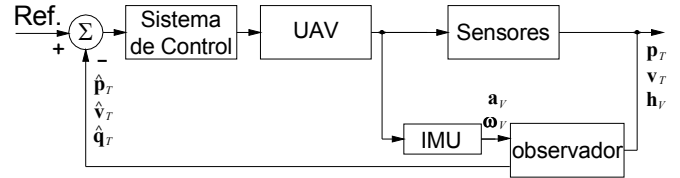


Fig. 2. Diagrama de funcionamiento del observador usando un modelo cinemático.

El modelo cinemático usa como entradas la aceleración y velocidad angular del sistema, información que es proporcionada por una unidad inercial de medida (IMU por *Inertial Measurement Unit*) conformada por tres acelerómetros y tres giróscopos.

3. MODELO CINEMÁTICO

El modelo cinemático tiene la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}_V, \boldsymbol{\omega}_V) \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{a}_V, \boldsymbol{\omega}_V) \quad (2)$$

Donde $\mathbf{x} = [\mathbf{p}_T \ \mathbf{v}_T \ \mathbf{q}_T]$ es el vector con las variables de estado del sistema, $\mathbf{p}_T = [x \ y \ z]^T$ es el vector de posición del centro de masa del vehículo medido en el marco inercial (NED), $\mathbf{v}_T = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ es el vector de velocidades del vehículo tomadas en el marco inercial (NED), $\mathbf{q}_T = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ es el cuaternio de actitud tomado en el marco inercial, $\mathbf{a}_V = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ es el vector de la aceleración medida en el marco del vehículo, tal como es entregado por los acelerómetros, $\boldsymbol{\omega}_V = [p_\omega \ q_\omega \ r_\omega]^T$ es el vector de velocidad angular medido en el marco del vehículo, tal como es entregado por los giróscopos, $\mathbf{y} = [\mathbf{p}_T \ \mathbf{v}_T \ \mathbf{h}_V]$ es el vector con las variables de salida del sistema y $\mathbf{h}_V = [h_x \ h_y \ h_z]^T$ es el vector de campo magnético en el marco del vehículo.

3.1 Ecuación para la Posición

$$\dot{\mathbf{p}}_T = \mathbf{v}_T \quad (3)$$

3.2 Ecuación para la Velocidad

Para relacionar la velocidad con respecto a un marco inercial con la aceleración medida por los acelerómetros, es necesario tener en cuenta que ambas están medidas en diferentes marcos de referencia. El cambio de base se hace usando la matriz de rotación (\mathbf{C}^T):

$$\dot{\mathbf{v}}_T = \mathbf{C}^T \mathbf{a}_V + \mathbf{g}_T \quad (4)$$

Donde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Aquí, q_i son elementos de un vector llamado “cuaternio”, que se explica en la sección 3.3.

\mathbf{g}_T es un vector que determina la fuerza de gravedad (Stevens et al, 2003).

3.3 Cuaternio

El cuaternio es un vector de cuatro componentes que representa la actitud del vehículo.

La velocidad de cambio del cuaternio está relacionada con la velocidad angular del vehículo por medio de la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{q}}_T = -\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_4\mathbf{q}_T \quad (6)$$

Donde

$$\mathbf{\Omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 & p_\omega & q_\omega & r_\omega \\ -p_\omega & 0 & -r_\omega & q_\omega \\ -q_\omega & r_\omega & 0 & -p_\omega \\ -r_\omega & -q_\omega & p_\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

3.4 Campo Magnético

El campo magnético es una salida del sistema, medida por los magnetómetros del vehículo. Constituye un vector de tres componentes, y cada componente representa la intensidad de campo magnético en cada uno de los tres ejes del vehículo. En el trabajo de Johnson et al. se utilizan las mediciones para calcular la declinación magnética (diferencia angular del norte geográfico respecto al norte magnético), lo que permite calcular el error en el rumbo del vehículo $\delta\psi_T$ (Johnson, 2006).

Siendo así, la función g que relaciona las salidas con las entradas y con el vector de estado se definiría como:

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = [\mathbf{p}_T \ \mathbf{v}_T \ \psi_T] \quad (8)$$

Y la ecuación que permite calcular el rumbo ψ_T a partir de las variables de estado del sistema es:

$$\psi_T = \text{atan2}(C_{12}, C_{11}) \quad (9)$$

Donde C_{11} es la componente (1,1) de la matriz C y C_{12} es la componente (1,2) de la matriz C . La matriz C se dio en (5).

3.5 Modelo Aumentado

Las entradas al modelo cinemático desarrollado son la aceleración y velocidad angular medidas por la unidad inercial, y estas medidas vienen corrompidas con ruido, que no es blanco, sino que incluye unas desviaciones aleatorias conocidas como “random walk”. Se agregan entonces al vector de estados seis componentes más, correspondientes precisamente a las desviaciones en los acelerómetros y los giróscopos. La idea es

que estos estados adicionales sean estimados por el observador y que se usen para corregir las medidas de aceleración y velocidad angular provenientes de la unidad inercial.

En la Tabla 1 se resumen las ecuaciones que se utilizan en el modelo aumentado. Puede verse en dicha tabla que las desviaciones en la aceleración y la velocidad se restan al vector de aceleración antes de integrar.

Tabla 1. Resumen de las ecuaciones que componen el modelo cinemático de un vehículo.

Estados del sistema	Salidas del sistema	Entradas del sistema
$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_T \\ \mathbf{v}_T \\ \mathbf{q}_T \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{b}_\omega \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}_V, \boldsymbol{\omega}_V)$	$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_T \\ \mathbf{v}_T \\ \psi_T \end{bmatrix} = g(\mathbf{x})$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_V \\ \boldsymbol{\omega}_V \end{bmatrix}$
$\mathbf{p}_T = \mathbf{v}_T$ $\dot{\mathbf{v}}_T = C^T \mathbf{a}_V + \mathbf{g}_T$ $\dot{\mathbf{q}}_T = -\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_4\mathbf{q}_T$ $\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_a$ $\dot{\mathbf{b}}_\omega = \mathbf{n}_\omega$	$\mathbf{p}_T = \mathbf{I}_3\mathbf{p}_T$ $\mathbf{v}_T = \mathbf{I}_3\mathbf{v}_T$ $\psi_T = \tan^{-1}(C_{12}, C_{11})$	$\mathbf{a}_V = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ $\boldsymbol{\omega}_V = [p_\omega \ q_\omega \ r_\omega]^T$

En la Tabla 1, \mathbf{I}_3 es la matriz identidad de orden 3; \mathbf{n}_a , \mathbf{n}_ω son ruidos blancos gaussianos de media cero, que pueden considerarse como perturbaciones,

$$\mathbf{\Omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 & (p_\omega - b_p) & (q_\omega - b_q) & (r_\omega - b_r) \\ -(p_\omega - b_p) & 0 & -(r_\omega - b_r) & (q_\omega - b_q) \\ -(q_\omega - b_q) & (r_\omega - b_r) & 0 & -(p_\omega - b_p) \\ -(r_\omega - b_r) & -(q_\omega - b_q) & (p_\omega - b_p) & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{b}_a = [b_{a_x} \ b_{a_y} \ b_{a_z}]^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{b}_\omega = [b_p \ b_q \ b_r]^T. \quad (12)$$

3.6 Modelo Linealizado

Para el diseño del observador se usa un modelo linealizado de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (14)$$

En donde las matrices se calculan usando una aproximación Taylor de primer orden.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{f}_{vq} & -\mathbf{C}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{f}_{qq} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & -0.5 \cdot \mathbf{Z}_q \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} & 0.5 \cdot \mathbf{Z}_q \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{f}_{\psi q} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}_{10 \times 6} \quad (18)$$

Donde

$$\mathbf{f}_{vq} = \begin{bmatrix} (q_0 \bar{a}_x - q_1 \bar{a}_y + q_2 \bar{a}_z) & (q_0 \bar{a}_x + q_1 \bar{a}_y + q_2 \bar{a}_z) & (-q_2 \bar{a}_x + q_1 \bar{a}_y + q_0 \bar{a}_z) & (-q_3 \bar{a}_x - q_0 \bar{a}_y + q_1 \bar{a}_z) \\ (q_1 \bar{a}_x + q_0 \bar{a}_y - q_1 \bar{a}_z) & (q_2 \bar{a}_x - q_1 \bar{a}_y - q_0 \bar{a}_z) & (q_1 \bar{a}_x + q_2 \bar{a}_y + q_3 \bar{a}_z) & (q_0 \bar{a}_x - q_3 \bar{a}_y + q_2 \bar{a}_z) \\ (-q_3 \bar{a}_x + q_1 \bar{a}_y + q_0 \bar{a}_z) & (q_3 \bar{a}_x + q_0 \bar{a}_y - q_1 \bar{a}_z) & (-q_0 \bar{a}_x + q_3 \bar{a}_y - q_2 \bar{a}_z) & (q_1 \bar{a}_x + q_2 \bar{a}_y + q_3 \bar{a}_z) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{a}_x = a_x - b_{a_x}, \quad \bar{a}_y = a_y - b_{a_y}, \quad \bar{a}_z = a_z - b_{a_z} \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_{qq} = -\frac{1}{2} * \begin{bmatrix} 0 & \bar{p}_\omega & \bar{q}_\omega & \bar{r}_\omega \\ -\bar{p}_\omega & 0 & -\bar{r}_\omega & \bar{q}_\omega \\ -\bar{q}_\omega & \bar{r}_\omega & 0 & -\bar{p}_\omega \\ -\bar{r}_\omega & -\bar{q}_\omega & \bar{p}_\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\bar{p}_\omega = p_\omega - b_p, \quad \bar{q}_\omega = q_\omega - b_q, \quad \bar{r}_\omega = r_\omega - b_r \quad (22)$$

$$\mathbf{Z}_q = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_{\psi q} = [\kappa(q_3 C_{11} - q_0 C_{21}) \quad \kappa(q_2 C_{11} - q_1 C_{21}) \quad \kappa(q_1 C_{11} + q_2 C_{21}) \quad \kappa(q_0 C_{11} + q_3 C_{21})] \quad (24)$$

$$C_{11} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \quad (25)$$

$$C_{21} = 2 * (q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) \quad (26)$$

$$\kappa = \frac{2}{C_{11}^2 + C_{21}^2} \quad (27)$$

3.7 Modelo Discretizado

Se elige como período de muestreo el inverso de la frecuencia de medida de la IMU: 0.01 segundos, debido a que se está trabajando con un modelo cinemático que integra la información proveniente de la IMU de forma que no se dispone de otra información entre estos periodos.

Para la discretización se utilizan siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A} \cdot T} \approx \mathbf{I}_{16} + T \cdot \mathbf{A} \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}_{16}) \mathbf{B} \approx \left(\mathbf{I}_{16} \cdot T + \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot T^2 \right) \mathbf{B} \quad (29)$$

$$\mathbf{H}_d = \mathbf{H} \quad (30)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (31)$$

4. MODELO DE LOS SENSORES

Es necesario tener en cuenta las características de los sensores utilizados, que se exponen a continuación.

4.1 Antena de un Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

El GPS es un Sistema Global de Navegación por Satélite (GNSS) que permite determinar en todo el mundo la posición de un cuerpo.

Es de especial interés, para el diseño del sistema de navegación, modelar el ruido del GPS. Para ello se tomó el modelo RCB-LJ de la compañía UBLOX, pues es el que se piensa utilizar en el AURA, la aeronave autónoma que está desarrollando la UPB, y a la cual se piensa aplicar el sistema de navegación desarrollado en este trabajo. Según las especificaciones para esta antena de GPS, el ruido puede modelarse como un ruido blanco, con una desviación estándar de 0.1 m/s en la velocidad y hasta de 5 m en posición. Las características del ruido para las medidas de posición se dan en la Tabla 2 y para las medidas de velocidad, en la Tabla 3 (las especificaciones para el modelo RCB-LJ se encuentran disponibles en la página web del fabricante: www.u-blox.com).

Tabla 2. Características del ruido la posición entregada por el GPS.

Parámetro	Valor
Media	0
Varianza	25 m ²
Tiempo de muestreo	0.25 s

Tabla 3. Características del ruido para la velocidad entregada por el GPS.

Parámetro	Valor
Media	0
Varianza	0.01 (m/s) ²
Tiempo de muestreo	0.25

4.2 Unidad Inercial (IMU)

Las características de ruido de una unidad inercial dependen del tipo de acelerómetros y giróscopos que la componen, así como del fabricante. Como referencia se tomará la IMU

utilizada por el AURA. Ésta es la μ IMU de la empresa MEMSense (IM05-0300C050A50). La unidad entrega medidas a una frecuencia de 100 Hz. Según las especificaciones del fabricante, el ruido entregado por esta unidad tiene una densidad de potencia de $0.0003 \text{ m/s}^2/\text{Hz}^{1/2}$ para la aceleración y de $0.1 \text{ }^\circ/\text{s}/\text{Hz}^{1/2}$ en la velocidad angular.

Dado que el ancho de banda del sensor es de 50 Hz, lo anterior equivale a una desviación de $\pm 0.002 \text{ m/s}^2$ en la aceleración y de $\pm 0.71 \text{ }^\circ/\text{s}$ en la velocidad angular.

Una desviación estándar de $\pm 0.71 \text{ }^\circ/\text{s}$ equivale a una de $\pm 0.0124 \text{ rad/s}$ y a una varianza de $1.54 \text{ rad}^2/\text{s}^2$.

Sin embargo, el ruido entregado por la unidad inercial no puede modelarse como un ruido blanco. Esto se debe a una componente adicional de desviación o *bias* que es aleatoria. Este tipo de proceso estocástico es conocido como un “camino aleatorio” (*random walk*), y puede modelarse como la integral de un ruido blanco gaussiano. De esta forma, el ruido de la unidad inercial se puede modelar como la suma de un ruido blanco y un camino aleatorio, así:

$$r_{imu} = r_{blanco} + \int r_{blanco} \quad (32)$$

En la Tabla 4 se presentan las características del ruido simulado para la aceleración medida por los acelerómetros, y en la Tabla 5 se muestran las características del ruido para la velocidad angular medida por los giróscopos.

Tabla 4. Características del ruido para los acelerómetros.

Parámetro	Valor
Media – ruido blanco	0
Varianza – ruido blanco	$4 \times 10^{-6} (\text{m/s}^2)^2$
Media – camino aleatorio	0
Varianza – camino aleatorio	$4 \times 10^{-6} (\text{m/s}^2)^2$
Tiempo de muestreo	0.01 s

Tabla 5. Características del ruido para los giróscopos.

Parámetro	Valor
Media – ruido blanco	0
Varianza – ruido blanco	$1.54 \times 10^{-4} (\text{rad/s})^2$
Media – camino aleatorio	0
Varianza – camino aleatorio	$1.54 \times 10^{-4} (\text{rad/s})^2$
Tiempo de muestreo	0.01 s

4.3 Magnetómetros

Estos son instrumentos que miden la dirección e intensidad de un campo magnético incidente. Comúnmente se utilizan para indicar la actitud de un objeto en movimiento con respecto al campo magnético de la tierra

El magnetómetro que se utilizará en el AURA es el modelo TCM5 de la compañía PNI. La precisión del magnetómetro elegido para el AURA es de 0.3° , y entrega datos cada 16 ms. Tiene una precisión de $\pm 0.05 \text{ } \mu\text{T}$ ($\pm 50 \text{ nT}$).

El ruido en las componentes del campo magnético medidas por los magnetómetros se simuló como un ruido blanco gaussiano. Las características del ruido simulado se dan en la Tabla 6

Tabla 6. Características del ruido para las medidas del magnetómetro.

Parámetro	Valor
Media	0
Varianza	2.5 nT^2
Tiempo de muestreo	0.05 s

5. FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman consiste esencialmente en un conjunto de ecuaciones matemáticas que implementan un estimador tipo predictor-corrector que es óptimo en el sentido de que minimiza la covarianza del error de estimación (Bishop, 1995). Desde el momento de su introducción, el filtro de Kalman ha sido objeto de investigaciones extensivas y aplicaciones, particularmente en el área de los vehículos autónomos o la navegación asistida.

5.1 Suposiciones Básicas

El filtro de Kalman se fundamenta en los siguientes supuestos (Maybeck, 1979):

- El sistema puede describirse con un modelo lineal. Cuando esto no es posible debe linealizarse el modelo del sistema. Esto es lo que se conoce como filtro extendido de Kalman.
- Los ruidos del sistema y de las mediciones son blancos y gaussianos. Decir que un ruido es blanco implica que su valor no tiene correlación en el tiempo y que su potencia es igual en todas las frecuencias. Un ruido blanco no existe realmente, pero para los cálculos matemáticos, simplifica el problema y se aproxima con mucha precisión a un ruido real.

5.2 Estructura del filtro.

En general, el funcionamiento del filtro se puede describir en tres etapas, a saber, inicialización, predicción y corrección (Welch, 2002).

La ganancia del filtro se calcula con información estadística referente a la precisión de los sensores y de los modelos utilizados (De la Parra, 2005). La estimación que hace el filtro se utiliza nuevamente en la etapa de predicción para predecir el valor siguiente del estado. La estructura general se ilustra en la Fig. 3.

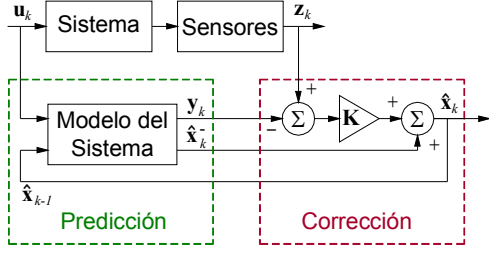


Fig. 3. Etapas del filtro de Kalman: predicción y corrección.

Inicialización

$$\mathbf{x}_0^- = \mathbf{x}_0 \quad (33)$$

$$\mathbf{P}_0^- = \text{var}[\delta \mathbf{x}_0] \quad (34)$$

Donde \mathbf{x}_0 es la estimación inicial del vector de estados del sistema y \mathbf{P}_0^- es la matriz de covarianza de la estimación. Este proceso solamente se ejecuta una vez.

Predicción

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-, \mathbf{u}_k) \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (36)$$

Donde $\Phi_k = \mathbf{I} + T\mathbf{F}$ es la matriz de propagación de estados, que corresponde a la discretización de \mathbf{F} , \mathbf{F} es la Jacobiana de f y \mathbf{Q}_k es la matriz de covarianza del error en el modelo.

Corrección

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T [\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T]^{-1} \quad (37)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (38)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{y}_k] \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \quad (40)$$

Donde, \mathbf{K}_k es la ganancia del filtro, \mathbf{R}_k es la matriz de covarianza del error en las medidas, \mathbf{z}_k son las medidas tomadas por los sensores en el tiempo k , $\mathbf{H}_k = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}$.

En la Fig. 4 se muestra un diagrama de bloques en el que se da la ubicación del filtro dentro del sistema general de control. En él se muestran las ecuaciones que utiliza.

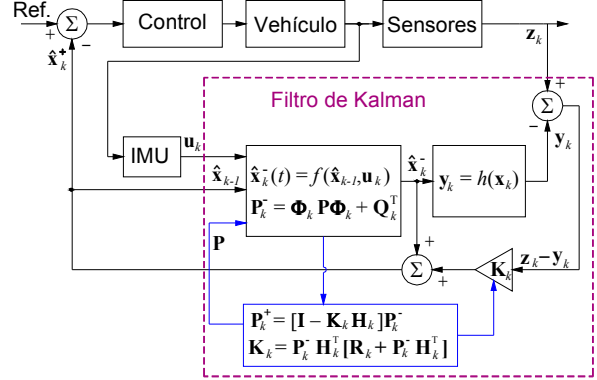


Fig. 4. Funcionamiento del filtro de Kalman con sus ecuaciones.

5.3 Aplicación Del Filtro De Kalman

El vector de estados que se pretende observar es:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}_T \quad \mathbf{v}_T \quad \mathbf{q}_T \quad \mathbf{b}_a \quad \mathbf{b}_\omega]^T \quad (41)$$

Modelo del sistema. Se usará el modelo discreto dado en (28) – (31).

Es importante anotar que las frecuencias de los sensores son diferentes entre sí. Por ello, lo que hace el filtro de Kalman es integrar las entradas para tener información del estado del vehículo (sin corregir) en los momentos en que no hay información de las salidas. Cuando hay sólo medidas del magnetómetro, hace la corrección del estado con las medidas de este sensor. Para este caso, no se utiliza la matriz \mathbf{H} completa, como se definió en (17), sino que se debe usar una matriz \mathbf{H} reducida dada por:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{0}_{1 \times 3} \quad \mathbf{0}_{1 \times 3} \quad \mathbf{f}_{\psi q} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \quad (42)$$

Donde $\mathbf{f}_{\psi q}$ se definió en (31).

Finalmente, cuando hay medidas de ambos sensores, se realiza la corrección del estado con las medidas de ambos, y se utiliza la matriz \mathbf{H} completa, como se definió en (17).

5.4 Simulación En Matlab® y Resultados

El filtro de Kalman se implementó en una función de MATLAB®.

Sintonización del filtro. La sintonización del filtro consiste en seleccionar los valores de las matrices de covarianza \mathbf{Q}_k y \mathbf{R}_k de manera que el resultado de la estimación hecha por el filtro de Kalman converja hacia el valor real de la variable.

Para determinar las matrices de covarianza se puede realizar un entrenamiento del filtro tal como el que se describe en (Abbeel et al, 2003). Para esto se requiere tener el filtro conectado a los sensores del sistema y además conocer de manera precisa el

valor real de las variables a estimar. Las ecuaciones de este algoritmo de entrenamiento son:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (x_t - f(x_{t-1}, u_t))(x_t - f(x_{t-1}, u_t))^T \quad (43)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\tau + 1} \sum_{t=0}^{\tau} (z_t - h(x_t))(z_t - h(x_t))^T \quad (44)$$

Donde τ es el tiempo que dura la simulación

Condiciones de simulación. Una vez se tienen las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} se puede corregir la estimación del filtro con las medidas de los diferentes sensores. Esta corrección solo sucede cuando ingresa una medida al filtro de Kalman. Dado que los sensores tienen diferentes frecuencias de muestreo, las correcciones se hacen en tiempos diferentes.

En la Fig. 5 se muestra la trayectoria seguida por el vehículo en tres dimensiones. Puede verse que el vehículo permanece a una altura constante de 100 metros sobre la superficie, avanza en la dirección positiva del eje x y su posición en el eje y es oscilatoria, de manera que el vehículo describe una onda senoidal en el plano $x - y$. Las condiciones iniciales para la simulación fueron de cero para la velocidad en los tres ejes, cero para la posición en los ejes $x - y$, -100 para la posición en el eje z .

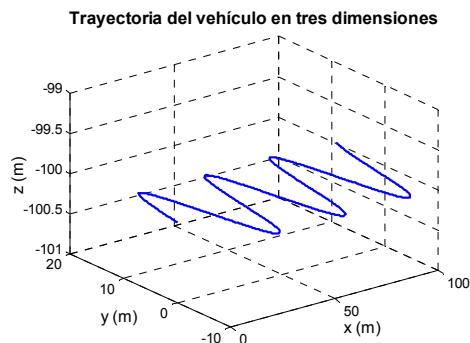


Fig. 5. Gráfica de la trayectoria seguida por el vehículo en tres dimensiones.

La velocidad del vehículo en el eje z es cero, pues la posición en este eje permanece fija en -100 m. La velocidad en el eje x es constante e igual a 5 m/s. Finalmente, la velocidad en el eje y varía de -10 m/s a 10 m/s, describiendo una onda. En la misma figura puede verse que la simulación duró 100 segundos. A los resultados de la simulación del movimiento del vehículo se les añadió ruido de acuerdo con la sección 4.

Resultados. En la Fig. 6 se ilustran los errores en la posición que el filtro permite obtener para cada uno de los ejes. Estos errores se hallaron restando las variables reales con las estimadas. Para la posición y la velocidad se añadió en las gráficas el error o ruido en las medidas entregadas por el GPS, para apreciar la diferencia entre ambos errores y la calidad de

filtrado del algoritmo (filtro de Kalman). Los errores en los demás estados presentan comportamientos gráficos similares, por lo que se ha preferido presentar los resultados de forma tabulada.

De la Tabla 7, se ve que, mientras con el GPS solo se tiene una precisión de $\pm 5 m$ en posición, el filtro logra $\pm 25 cm$. En la velocidad, la precisión se duplica.

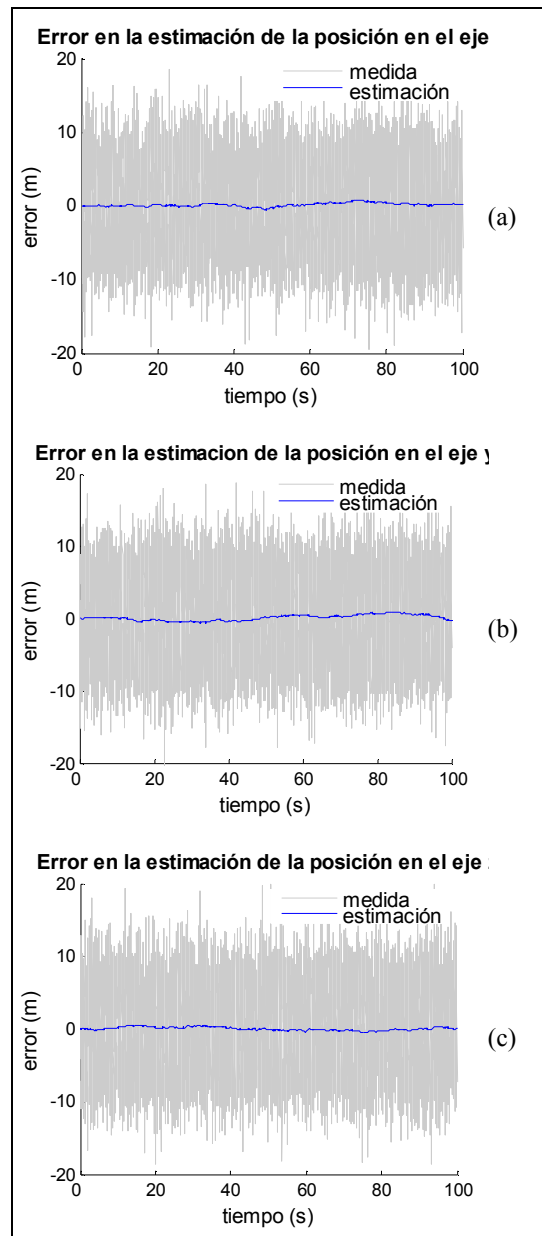


Fig. 6. Gráfica del error en la estimación de la posición: (a) en el eje x (b) en el eje y (c) en el eje z . El error se compara con el ruido de las medidas de posición entregadas por el GPS.

Tabla 7. Resumen de resultados obtenidos con el filtro de Kalman, en términos del error cuadrático medio en cada variable de estado. Se muestran también, a modo de comparación, la desviación estándar en las medidas de posición y velocidad.

Variable	Descripción	RMS	Desviación estándar del sensor
x	Posición en el eje x	0.313 m	5 m
y	Posición en el eje y	0.255 m	5 m
z	Posición en el eje z	0.247 m	5 m
V_x	Velocidad en el eje x	0.055 m/s	0.1 m/s
V_y	Velocidad en el eje y	0.059 m/s	0.1 m/s
V_z	Velocidad en el eje z	0.048 m/s	0.1 m/s
ϕ	Ángulo de Euler	0.578°	–
θ	Ángulo de Euler	1.053°	–
ψ	Ángulo de Euler	1.298°	–
b_{a_x}	Bias de aceleración en el eje x	0.0011 m/s ²	–
b_{a_y}	Bias de aceleración en el eje y	0.0012 m/s ²	–
b_{a_z}	Bias de aceleración en el eje z	0.0012 m/s ²	–
b_p	Bias de velocidad angular en el eje x	0.315 °/s	–
b_q	Bias de velocidad angular en el eje y	0.334 °/s	–
b_r	Bias de velocidad angular en el eje z	0.336 °/s	–

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se aplicó un filtro de Kalman en el diseño de un sistema de navegación para un vehículo no tripulado, encaminado a ser aplicado en varios proyectos que están siendo desarrollados actualmente en la UPB.

A partir de los resultados obtenidos en simulación con el filtro de Kalman se puede concluir que éste es capaz de estimar el estado de un vehículo a partir de medidas ruidosas y de un modelo cinemático.

El filtro de Kalman es ideal para sistemas en que los sensores responden a diferentes frecuencias, puesto que el observador no requiere en su corrección que las salidas estén disponibles en todo momento. Adicionalmente el filtro de Kalman combina la información estadística de este sistema y no impone condiciones difíciles de satisfacer, lo cual es ideal puesto que se está trabajando con un sistema que es altamente acoplado, que tiene múltiples entradas y salidas, que no es lineal y que al

linealizarlo es variante en el tiempo. El filtro de Kalman es ideal para trabajar en tiempo real puesto que sólo requiere los resultados de la última estimación y como ventaja adicional, recibe toda la información que se le pueda proporcionar, de manera que incluso integrar información de otros sensores es una tarea fácil.

La desventaja del filtro de Kalman es que la sintonización de las matrices de covarianza no es sencilla en simulación, y mucho menos en una aplicación real. Adicionalmente, debido a que el filtro de Kalman depende de la información estadística sobre las varianzas de las medidas entregadas por los sensores, es un algoritmo sensible a la variación de los parámetros de ruido de cualquiera de los sensores empleados.

Debido a que el filtro de Kalman depende de la información estadística sobre las medidas de los sensores, cuando desee utilizarse este algoritmo en el sistema de navegación de cualquier vehículo, será necesario cambiar los valores de las matrices Q y R de acuerdo con la dinámica de error de los sensores a utilizar. Esta tarea puede tomar un buen tiempo, puesto que, a diferencia del trabajo realizado en simulación, en la práctica no se tendría conocimiento del valor real de las variables.

7. BIBLIOGRAFÍA

- ABBEEL, Pieter; COATES, Adam; MONTEMERLO, Michael; NG, Andrew and THURN, Sebastian. *Discriminative Training of Kalman Filters*. In Proceedings of Robotics: Science and Systems, 2005; p.289-296.
- CACCIA, G. Veruggio; ALESSANDRI, M. *Fault Detection of Actuator Faults in Unmanned Underwater Vehicles*. IFAC Control Engineering Practice, England Vol. 7, (March 1999) pp. 357-368.
- BISHOP, Gary. *An Introduction to the Kalman Filter*. North Carolina: Technical Report TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, 1995; p. 1-16.
- DE LA PARRA, Sergio. *Low cost navigation system for UAV's*. Aerospace Science and Technology. No.9. (Jun 2005) Madrid, Spain; p. 504–516.
- DROLET, Louis., FRANÇOIS, Michaud. and CÔTÉ, Jean. *An Adaptable Navigation System for an Underwater ROV*. Proceedings PRECARN-IRIS International Symposium on Robotics (ISR), Montréal Québec, 2000; p. 244-245.
- FARELL, Jay. and BARTH, Matthew. *The Global Positioning System and Inertial Navigation*. New York, McGraw-Hill, 1999; 340 p.
- GREWAL, Mohinder S; WEILL, Lawrence R. and ANDREWS, Angus P. *Global Positioning Systems, Inertial*

- Navigation, and Integration*. New York, Wiley-Interscience, Scientific Technical and Medical Division, 2001. 392p.
- JOHNSON, Eric N., FONTAINE, Sebastian and KAHN, Aaron D. *Minimum Complexity Uninhabited Air Vehicle Guidance and Flight Control System*. School of Aerospace Engineering Georgia Institute of Technology, Atlanta. Naval Research Laboratory, 2006.
- JUNY, Myungsoo, ROUMELIOTISY, Stergios I. and SUKHATMEZ, Gaurav S. *State Estimation of an Autonomous Helicopter Using Kalman Filtering*. Intelligent Robots and Systems, October 1999. IROS '99. Proceedings. IEEE/RSJ International Conference. vol. 3; pp. 1346-1353
- LAVIOLA, Joseph J. *A Comparison of Unscented and Extended Kalman Filtering for Estimating Quaternion Motion*. In Proceedings of the American Control Conference IEEE Press, June 2003, p. 2435-2440.
- MAYBECK, Peter S., *Stochastic Models, Estimation, and Control*. Air Force Institute of Technology. Academic Press, New York, 1979.
- MAYHEW, David McNeil. *Multi-rate Sensor Fusion for GPS Navigation Using Kalman Filtering*. Thesis (Master of science in electrical engineering), faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.
- McGOWAN, R. (2004, July). *High Accuracy Position and Attitude*. Thales Research and Technology, UK, Disponible en: <http://www.thalesresearch.com/Portals/0/NAV040707.pdf>.
- MOSTOV, K. and SOLOVIEV, A. *Fuzzy Adaptive Stabilization of Higher Order Kalman Filters in Application to Precision Kinematic GPS*. Institute of Navigation Meeting of the Satellite Division, Vol. 2, 1996; p. 1451-1456.
- NEARCHOU, A. *Adaptive Navigation of Autonomous Vehicles Using Evolutionary Algorithms*. Artificial Intelligence in Engineering, vol. 13, No. 2, (1999, April); pp. 159-173.
- PROCTOR, Alison A; KANNAN, Suresh K; RAABE, Chris; CHRISTOPHERSEN, Henrik B. and JOHNSON, Eric N. *Development of an Autonomous Aerial Reconnaissance System at Georgia Tech*. School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, UAV Laboratory.
- STEVENS, Brian L. and LEWIS, Frank L. *Aircraft Control and Simulation*. Editorial John Wiley & Sons, 2^d Ed, 2003, 662 p.
- SVENSSON and HOLST, J. *Integration of Navigation Data*. International Journal of Navigation, Jan. 1995, v48, no. 1, pp. 114-135
- VANICEK, Peter and OMERBAŠIĆ, Mensur. *Does a Navigation Algorithm Have to Use Kalman Filter?* Canadian Aeronautical and Space Institute Journal, Vol. 45, No. 3, 1999; p. 292-296.